Geometrinen algebra: kun vektorien maailma ei riitä

Risto A. Paju

4. huhtikuuta 2003

Tiivistelmä

Geometrinen algebra on viime vuosina kasvattanut suosiotaan luonnontieteiden matemaattisena menetelmänä. Sen juuret ovat vektori- ja kompleksialgebrassa, joiden hyvät puolet on saatu yhdistettyä, ja samalla järjestelmä on laajennettavissa useampaan ulottuvuuteen.

Tärkeä osa laajennusta on se, että n-ulotteisessa avaruudessa voi olla erilaisia olioita, joiden ulottuvuus vaihtelee nollasta n:ään. Skalaarien (0-ulotteinen) ja vektorien (1-ulotteinen) seuraaja on suunnattu tasoelementti, bivektori. Nämä kaksiulotteiset objektit soveltuvat hyvin esim. pyörimisliikkeen käsittelyyn riippumatta avaruuden ulottuvaisuudesta; akselin käsite toimii vain kolmessa ulottuvuudessa.

Fysiikan havainnollistaminen helpottuu oleellisesti näillä uusilla työkaluilla, varsinkin kun modernit teoriat vaativat totuttua enemmän ulottuvuuksia. Lisäetuna saadaan laskennallista tehokkuutta esim. tensorialgebraan verrattuna. Myös vektori- ja kompleksialgebraa on helpompi ymmärtää, kun ne nähdään määrättyinä erikoistapauksina geometrisen algebran kokonaisuudesta.

Avainsanat: geometrinen algebra, luonnontieteiden matemaattiset menetelmät

Johdanto

Luonnontieteitä ja matematiikkaa ei aina ole pidetty erillisinä aloina. Vielä nykyäänkin ne kehittyvät vahvassa vuoropuhelussa toisiaan tukien. Kuitenkin usein toivotaan, että luonnonilmiöiden hahmottaminen ja tieteen perusperiaatteet voitaisiin käsittää matemaattisista yksityiskohdista riippumatta. Tämä vaatimus liittyy osittain siihen tosiasiaan, että samaa ilmiötä voidaan kuvata hyvinkin erilaisilla matemaattisilla työkaluilla.

Tilannetta voi havainnollistaa suhteellisuusperiaatteella, jonka mukaan fysiikan lakien tulee olla riippumattomia koordinaatiston valinnasta. Pidemmälle vietynä ihanne voi tarkoittaa, että fysiikan käsitteet on voitava esittää koordinaatistoajattelun ulkopuolella. Esimerkiksi Newtonin liikelakien yhtälö $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ei vaadi mitään tiettyä matemaattista esitystapaa vektoreille $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{a}$. Fysiikan kannalta riittää käsitys vektorista suureena, jolla on suunta ja suuruus.

Fyysikoille jää monessa mielessä vapaus valita erilaisten matemaattisten työkalujen väliltä, esimerkiksi sen mukaan miten ne tarjoavat laskennallista eleganssia tai käsitteiden hahmotusta. Jälkimmäinen vaikuttaakin ehkä ristiriitaiselta yllämainitun periaatteen valossa, mutta on myönnettävä, että matemaattisella järjestelmällä on oma vaikutuksensa fysiikan käsittämiseen. Vaikka matematiikka onkin antanut fysiikalle paljon, se on valitettavasti myös aiheuttanut tiettyjä hankaluuksia.

Geometrinen algebra (GA) on käytössä uudehko matemaattinen formalismi, joka korjaa tiettyjä hankaluuksia yhdistämällä monen muun menetelmän hyviä puolia. Sen laskennallinen voima ja yksinkertaisuus näyttäytyvät mm. tietokoneita vaativissa numeerisissa sovelluksissa. Toisenlaisesta tehokkuudesta antaa viitteen se tosiasia, että GA yleistää kaksiulotteisen kompleksianalyysin korkeampiin ulottuvuuksiin.

GA:n merkittävintä antia luonnontieteille lienevät kuitenkin sen mahdollisuudet mutkikkaiden ilmiöiden hahmottamisessa. GA:sta löytyy tehokkaita työkaluja sittenkin, kun vektorit ja kompleksiluvut eivät enää riitä.

Matemaattisten menetelmien epäkohtia

Jo lukiolaiset törmäävät erääseen vektorialgebran keskeiseen ongelmaan ristitulon muodossa. Operaatio onnistuu ainoastaan kolmessa ulottuvuudessa, ja se saattaa johtaa fysiikan puolella harhaan esimerkiksi siten, että sähkömagnetismi nähdään jotenkin kolmeen ulottuvuuteen sidottuna.

Kun moderni fysiikka tarvitsee enemmän kuin kolme ulottuvuutta, otetaan yleensä käyttöön tensorilaskenta. Sen lisäksi, että formalismi toimii mielivaltaisella ulottuvuuksien määrällä, näyttää siltä että tensoreiden avulla voidaan käsitellä myös vektoreita “korkeampia” objekteja. Koska vektori on oikeastaan yksiulotteinen elementti n-ulotteisessa avaruudessa, on seuraava mahdollinen askel 2-ulotteinen tasomainen olio. Yleistyksestä maksetaan kuitenkin se hinta, että geometrinen käsitys vektoreista ja muista objekteista hämärtyy, koska tensorilaskennassa käsitellään objektien itsensä sijasta vain niiden komponentteja.

Kolmessa ulottuvuudessa lisää päänvaivaa aiheuttaa se, että ristitulosta saatava vektori käyttäytyy koordinaattimuunnoksissa eri tavalla kuin paikkavektorit. Nämä liittyvät esimerkiksi pyörimisliikkeeseen, ja fysiikassa niitä sanotaankin aksiaalivektoreiksi erotuksena varsinaisista vektoreista (polaarivektorit). Ongelmia syntyy, koska näitä kahta ei aina selkeästi eroteta.

Jos pyörimismäärää ajatellaan vektorina, se määritellään akselin suuntaisesti kaavalla

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

jossa **r** on kappaleen paikkavektori ja **p** sen liikemäärä. Mutta miten määritellä pyörimismäärä, jos ulottuvuuksia on enemmän kuin kolme, eikä ristituloa ole käytössä?

Kahden ulottuvuuden pyörimisliike on helppo havainnollistaa; **r** ja **p** ovat yhdessä tasossa. Edellinen määritelmä ei kuitenkaan toimi, koska pyörimisen “akseli” ei mahdu kahteen ulottuvuuteen. Ei kuitenkaan ole mitään epäilystä, etteikö pyörimisliike siellä olisi samanluonteista kuin kolmessakin ulottuvuudessa.

Yhdessä ulottuvuudessa pyörimisliikettä on hankala kuvitella; toisaalta kolmessa ulottuvuudessa huomataan, että **r** ja **p** ovat aina samassa tasossa (kun pyörimismäärä säilyy). Näyttää siltä, että pyörimisliikkeessä on jotain perustavanlaatuisesti kaksiulotteista.

Pyörimismäärä voidaankin määritellä suunnatuksi tasoelementiksi, jonka suuruus on $rp\sin\theta$ säteen ja liikemäärän välisen kulman θ mukaan. Määritelmä toimii samalla tavalla niin kahdessa kuin kolmessa ulottuvuudessa, joten miksei myös neljässä; se kun ei vaadi, että pyörimistasolle olisi yksiselitteinen normaalivektori eli pyörimisen "akseli".

Hieman jälkiviisaasti voidaan muuten arvella, että ajatus pyörimismäärästä tasosuureena sisältyy jo Keplerin planeettaliikkeiden toiseen lakiin: planeetasta Aurinkoon piirretty säde pyyhkäisee tietyssä aikayksikössä aina saman pinta-alan, mikä kuvastaa pyörimismäärän säilymistä.

Eräs geometrisen algebran keskeisin oivallus onkin se, että pyörimisliikkeeseen ja muihin fysikaalisiin ilmiöihin liittyvä suunnattu tasoelementti säilytetään tasoelementtinä. Se ymmärretään omanlaisena objektinaan kuten skalaari tai vektori. Sitä ei voi tyhjentävästi selittää esimerkiksi normaalivektorin avulla, kuten ristitulossa yritetään tehdä.

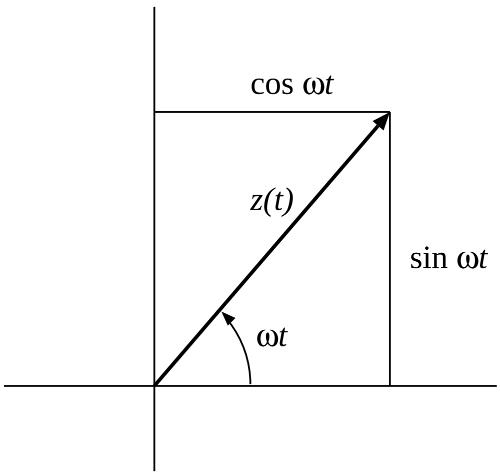
Historian kautta yksityiskohtiin

Kompleksiluvut

Kolmesta ulottuvuudesta useampaan siirryttäessä joudutaan vaihtamaan vektorialgebra joksikin muuksi. Vastaava tapahtuu kaksiulotteiseen tasoon laskeuduttaessa, jo siitäkin syystä ettei pyörimistä voi käsitellä akselin kautta. Työkalu lienee kuitenkin tensoreita tutumpi, nimittäin kompleksialgebra. Pyörimisliikettä on helppo havainnollistaa esimerkiksi seuraavalla eksponenttiesityksellä:

$$z(t) = \cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t}$$

Jos t on kuluva aika, luku kuvaa pyörimisliikettä kulmanopeudella ω. On huomattava, että kompakti esitys pyörimisliikkeelle on tässäkin mahdollista ilman akselin käsitettä (kuva 1).



Kuva 1: Pyörimisliike kompleksitasossa.

Korkeampi kompleksianalyysi antaa monia hämmästyttäviä laskennallisia tuloksia. Niiden perusteella voi arvailla, että kyseessä on paljon enemmän kuin pelkkä kahden ulottuvuuden vektorialgebra. Kompleksianalyysiä käytetäänkin tehokkaana työkaluna fysiikassa, jos ulottuvuuksien määrä rajoittuu kahteen.

Esimerkkinä mainittakoon konformikuvauksen käyttö virtaustekniikassa: kuvitellaan, että neste virtaa ulkopuolisesta lähteestä tasaisesti kohti kiinteää kiilaa, joka jakaa virtauksen kahtia. Tehtävänä on laskea virtausnopeus jokaisessa pisteessä (emme tässä mene virtausmekaniikan yksityiskohtiin). Konformikuvauksen avulla voimme "oikaista" kiilan niin, että järjestelmään tulee yksi tasainen pinta, jolloin fysiikka helpottuu oleellisesti. Kun nopeudet on laskettu, suoritetaan käänteinen kuvaus alkuperäiseen systeemiin.

Vektorialgebrassa vastaava operaatio on mahdoton, koska siitä puuttuu käännettävä laskutoimitus. Pistetulosta $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ on mahdotonta määrittää yksikäsitteinen $\mathbf{b}$ jos $\mathbf{a}$ tunnetaan, ja sama rajoitus koskee ristituloa. Geometrinen algebra on oleellisesti ratkaisu näihin rajoituksiin, ja samalla kompleksialgebran yleistys useampaan ulottuvuuteen.

Johdatuksena GA:han on syytä kiinnittää huomio kahden kompleksiluvun seuraavanlaiseen tuloon:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= r_1 e^{i\theta_1} \\
z_2 &= r_2 e^{i\theta_2} \\
\\
\Rightarrow z_1 z_2^* &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{-i\theta_2} \\
&= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \\
&= r_1 r_2 \left(\cos\delta + i \sin\delta\right) \\
& \quad \text{jossa } \delta \equiv \theta_1 - \theta_2
\end{aligned}
$$

Tässä tulossa on toisesta luvusta otettu kompleksikonjugaatti, jotta operaatio luvun itsensä kanssa tuottaisi sen itseisarvon neliön. Jatkon kannalta tuloksessa on monta kiinnostavaa seikkaa, jos lukuja ajatellaan vektoreina:

- Kosinitermi on samansuuruinen kuin vektorien pistetulo (δ on vektorien välinen kulma)
- Sinitermi on samansuuruinen kuin ristitulo
- Kosini- ja sinitermit ovat eri laatua: ensimmäinen on reaaliluku ja toinen puhdas imaginaariluku.

Tämähän on kuin laskisi pistetulon ja ristitulon yhteen, vaikka varsinkin fyysikon näkökulmasta saattaa näyttää, ettei niin voi tehdä. Myöhemmin huomataan, ettei operaatio ole yhtään oudompi kuin kohtisuorien yksikkövektorien $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ summa. Erilaatuisten komponenttien summa onkin yksi keskeinen ominaisuus geometrisessa algebrassa.

Hamiltonin kvaterniot

Brittiläinen fyysikkonakin tunnettu William Rowan Hamilton yritti ensimmäisten joukossa yleistää kompleksialgebraa useampaan ulottuvuuteen. Hänen vuonna 1844 esittelemänsä kvaternioalgebra perustui "yksikkövektoreihin" $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ joiden laskutoimitukset määritellään seuraavasti:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

Jokainen yksikkövektori vastaa siis eräänlaista imaginaariyksikköä, ja lisäksi viimeinen yhtälö $\mathbf{ijk} = -1$ kytkee yksiköt toisiinsa kolmiulotteisessa avaruudessa. (Samalla myös määrittyy avaruuden kätisyys.) On huomattava, että tässä vaiheessa ei nykyisin tuntemaamme vektorialgebraa ollut vielä kehitetty.

Määritelmästä johtuu esimerkiksi $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$. Algebrassa ei siis päde vaihdantalaki, kommutatiivisuus. Tämä liittyy siihen, että kolmessa ja useammassa ulottuvuudessa avaruudella on kätisyys, oikea tai vasen. Kaksiulotteisessa kompleksitasossa kätisyyttä ei ole.

Kvaternioiden yhteys vektorialgebraan ja kompleksilukuihin selviää tarkemmin kahden "vektoriluonteisen" kvaternion tulosta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \\
\mathbf{b} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \\
\Rightarrow \mathbf{ab} &= -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&\quad +(a_2b_3 - b_2a_3)\mathbf{i} + (b_3a_1 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Tuloksena on jälleen "pistetulo + ristitulo, " tällä kertaa tutussa komponenttimuodossa. Pistetulon merkki tosin on vaihtunut, koska yksikkövektorin neliö on negatiivinen.

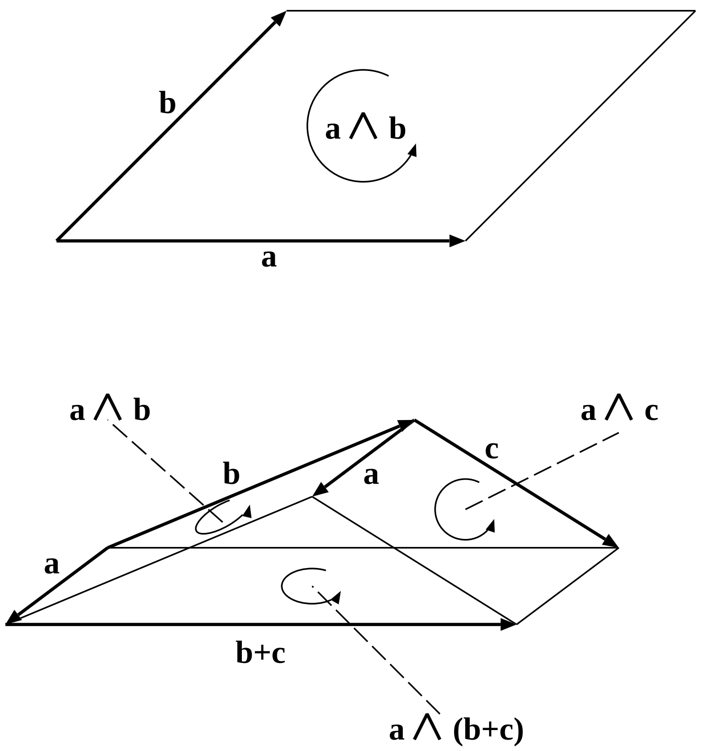
Tulon vektoriosa on muodollisesti täysin sama kuin vektorien ristitulossa. Itse asiassa se on juuri nykyisen ristitulomme alkuperä. Hamiltonin aikalaiset huomasivat, että ristitulo-osa soveltui hyvin esimerkiksi sähkömagnetismin käsittelyyn ja ratkaisi siten oleellisia ongelmia 1800-luvun fysiikassa. Tulon eri osat joutuivat näin valitettavasti erilleen, mikä nykyisestä näkökulmasta oli tietenkin hyvin kapea-alainen ja virheellinen ratkaisu. Eikä vähiten siksi, että matematiikka näin rajoitettiin kolmeen ulottuvuuteen.

Grassmannin antikommutatiivinen algebra

Toinen tärkeä askel kohti geometrista algebraa otettiin myös vuonna 1844. Saksalainen opettaja Hermann Günther Grassmann pohti tiettävästi ensimmäisenä, kuinka suunnattua tasoelementtiä voitaisiin kuvata matemaattisena vektoriin verrattavana elementtinä. Hän määritteli kahden vektorin ulkoisen tulon $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ tasoelementiksi seuraavin ominaisuuksin (kuva 2):

1. Tulo on antisymmetrinen: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$
2. Tasoelementit eli bivektorit muodostavat lineaarisen avaruuden, eli niitä voi laskea yhteen kuten vektoreitakin.
3. Tulossa pätee liitäntälaki: $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$.

Geometrisessa kuvailussa on tärkeää, että tasoelementille ei ole määrätty tiettyä muotoa, ainoastaan suunta ja suuruus. Suunta voidaan ajatella pyörimissuunnaksi, koska kussakin tasossa on kaksi mahdollista bivektorin suuntaa. Kahden vektorin muodostama tasoelementti on suuruudeltaan sama kuin vektoreiden määräämän suunnikkaan pinta-ala, mutta samansuuruinen ja -suuntainen elementti voidaan saada myös joistakin muista vektoreista. Toisin sanoen annetusta tasoelementistä ei voi päätellä, mistä vektoreista se on muodostettu.



Kuva 2: Vektorien ulkoiset tulot muodostavat suunnattuja tasoelementtejä. Ulkoiselle tulolle pätee osittelulaki $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$. Samalla esimerkki näyttää, kuinka kahden tasoelementin summana muodostuu kolmas.

Clifford keksii geometrisen algebran

Brittiläinen filosofi, fyysikko ja matemaatikko William Kingdon Clifford kuului niihin harvoihin jotka olivat ymmärtäneet Grassmannin omalaatuisia merkintöjä sekä aikaansa edellä olevia ajatuksia. 1800-luvun matemaatikot olivat vasta aloittamassa vaihtoehtoisten algebrojen tutkimista ja avautumassa sille mahdollisuudelle, ettei tulon tarvitse aina olla kommutatiivinen. Geometrian kannaltahan on oleellista, ettei vaihdantalaki voi olla yleisesti voimassa, mikä liittyy pitkälti koordinaatiston kätisyyteen.

Cliffordin vuonna 1878 esittelemä geometrinen algebra perustui uudenlaiseen laskutoimitukseen, geometriseen tuloon. Kompleksilukuihin vedoten hän yhdisti pistetulon ja ulkoisen tulon:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Tämän jälkeen hän määritteli algebran uudestaan aksiomaattiselta pohjalta, jossa pistetulo ja ulkoinen tulo eivät enää ole keskeisessä asemassa. Geometrista tuloa koskevat seuraavat säännöt:

1. Liitäntälaki: $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{abc}$
2. Osittelulaki: $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$
3. Kahden vektorin välisessä geometrisessa tulossa symmetrinen osa on skalaari: $(\mathbf{ab} + \mathbf{ba})/\mathbf{2} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (tuttu skalaaritulo)

Tästä voidaan uudelleen määritellä esim. ulkoinen tulo:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \equiv \mathbf{ab} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{ab} - \mathbf{ba})/\mathbf{2}$$

Geometrisen tulon tehokkuus näkyy esimerkiksi siinä, että tulolle on olemassa käänteinen operaatio, jakolasku. Vektorialgebrasta tiedämme, että pistetulolla ja ulkoisella tulolla (vastaa ristituloa) yksinään ei ole käänteisoperaatiota. Mutta niiden yhdistelmällä onkin käänteinen operaatio, aivan kuin kompleksilukujen jakolasku.

Jos on annettu geometrinen tulo $\mathbf{ab}$ sekä vektori $\mathbf{a}$, tiedetään vektorin $\mathbf{b}$ sijaitsevan tasossa $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. $\mathbf{b}$:n ratkaisemiseksi riittää siten kaksi komponenttia. $\mathbf{ab}$:n skalaari- ja bivektorikomponenttien itseisarvoista

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = ab_{||}$$
$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = ab_{\perp}$$

saadaan reaalilukujen jakolaskulla $b_{||}$ ja $b_{\perp}$, $\mathbf{b}$:n komponentit $\mathbf{a}$:suunnassa ja sitä kohtisuoraan. Komponenttien etumerkit (+/-) selviävät bivektorin suunnasta sekä skalaaritulon merkistä. Näinollen $\mathbf{b}$ voidaan yksikäsitteisesti määrätä eräänlaisella jakolaskulla. Käytännössä laskua ei suoritettaisi näin, eikä tätä voi ajatella täsmällisenä todistuksena, mutta jakolaskun olemassaolo tulee näin selvemmäksi.

Liitäntälaista seuraa, että geometrista tuloa ei ole rajoitettu vain kahden vektorin väliseksi operaatioksi. Esimerkiksi ulkoinen tulo vektorin ja bivektorin välillä on trivektori, suunnattu tilavuuselementti, jos vektori ei ole samassa tasossa bivektorin kanssa. Tällainen tilanne saadaan vaikkapa kolmella vektorilla: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ voidaan ymmärtää vektorien muodostamana suuntaissärmiönä. Suuruudeltaan tämä on sama kuin vektorialgebran kolmitulo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Trivektorilla on lisäksi suunta, joka kertoo, muodostavatko vektorit $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ oikea- vai vasenkätisen kokoelman.

Kuten jo kvaternioiden yhteydessä todettiin, ristitulo ja pistetulo erillisinä operaatioina voittivat muut menetelmät 1800-luvun arvovaltaisten tiedemiesten painostuksessa. Sen ajan fysiikka ei tosin vaatinut tehokkaampia menetelmiä. Geometrisen algebran unohdukseen vaikutti varmasti myös Cliffordin ennenaikainen kuolema vuonna 1879. Kun 1900-luvun alun suhteellisuusteoria ja kvanttimekaniikka alkoivat vaatia tehokkaampaa matematiikkaa korkeammissa ulottuvuuksissa, oli geometrinen algebra käytännössä kadonnut. Fyysikot joutuivat turvautumaan tensorilaskentaan, joka on lähinnä komponenttiesitys vailla intuitiivista sisältöä.

Hestenes pelastaa GA:n

Geometrinen algebra löydettiin uudelleen vasta 1960-luvulla, jolloin amerikkalainen tutkija David Hestenes huomasi kvanttimekaniikan matriisiesityksessä piilevän geometrisen merkityksen. Matemaattisesti katsottuna Paulin spin-matriisit muodostavat kolmen ulottuvuuden Cliffordin algebran, koska ne noudattavat samoja laskusääntöjä. GA:n tuominen yleisempään tietoisuuteen on ollut vaikeaa osittain siksi, että sitä on pidetty liiaksi kvanttimekaniikkaan kytkettynä järjestelmänä. Hestenes huomasi kuitenkin varhain, että GA on tehokas ja intuitiivinen työkalu kaikkiin matemaattisiin tieteisiin, ja hänen työnsä onkin palkittu vuonna 2002 amerikkalaisten fysiikanopettajien Ørsted-mitalilla.

Laskennallisia esimerkkejä

Kompleksilukujen geometrinen tulkinta

Kahden ulottuvuuden geometrisessa algebrassa on seuraavat peruselementit: skalaari 1, yksikkövektorit $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$, sekä bivektori $I \equiv \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Yksikkövektoreille pätee luonnollisesti $\mathbf{e}_k^2 = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k = 1$ $(k = 1, 2)$. Koska $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ on kahdessa ulottuvuudessa korkeimman asteen objekti, on sillä erityinen asema ja nimitys *pseudoskalaari*. Bivektorina sille pätee $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$. Erityisesti huomattakoon pseudoskalaarin neliö

$$I^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -1$$

Näin olemme geometrisista lähtökohdista saaneet objektin, jonka neliö on negatiivinen, ja yhteys kompleksilukuihin on selvempi. Yleinen vektori kahdessa ulottuvuudessa voidaan muuntaa kompleksiluvuksi seuraavasti:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \\ \Rightarrow \mathbf{e}_1\mathbf{v} &= a\mathbf{e}_1^2 + b\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ &= a + Ib \end{aligned}$$

Vektorin $\mathbf{e}_1$ valinta voidaan selittää sillä, että se vastaa kompleksitason reaaliakselia jolla vaihekulma on nolla. Se siis määrittää kompleksitason sijainnin suhteessa vektoritasoon.

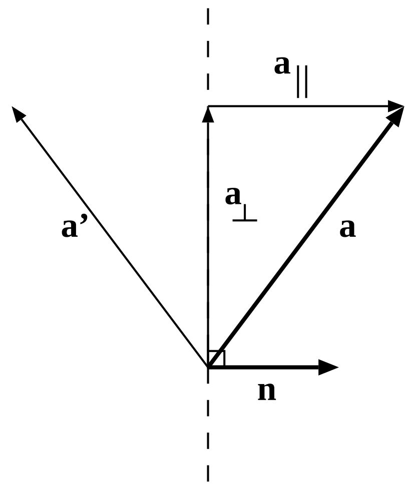
Geometrisen algebran kautta saadaan näin uusi näkökulma kompleksilukujen geometriseen merkityksen. Moni yritys sijoittaa kompleksilukuja fysiikan kaavoihin on epäonnistunut lähinnä siksi, että niiden geometrinen merkitys on ollut epäselvä.

Jos esimerkiksi sijoitamme suhteellisuusteorian kaavoihin valonnopeutta suuremman nopeuden, saamme tekijän jossa esiintyy negatiivisen luvun neliöjuuri. Tulos voidaan ajatella imaginaarisena tekijänä, mutta GA:n perusteella voimme arvata, että sellainen luku ei ole vektori eikä skalaari. Näin voidaan entistä vahvemmin perustella nopeuden yläraja suhteellisuusteoriassa.

Eräs GA:n tärkeä tavoite onkin korvata fysiikassa ja insinööritieteissä käytetyt kompleksiluvut paremmin käsitettävillä suureilla. Radikaalein vaihtoehto olisi päästä kompleksiluvuista kokonaan eroon ja sitä kautta välttää turhia sekaannuksia.

Peiliheijastus

Kolmiulotteisessa todellisuudessamme peilit ovat kaksiulotteisia tasoja. Toisaalta peilaus ei näytä mahdottomalta kahdessakaan ulottuvuudessa, jossa peili on viivamainen. Aivan kuin pyörimisliikkeestä puhuttaessa, on peilaus voitava määritellä ulottuvuuksista riippumatta. Kaksi- ja kolmiulotteiselle peilille yhteinen tekijä on normaalivektori, joka voidaan ottaa yleisen peilausoperaation perustaksi (kuva 3).



Kuva 3: Peiliheijastus normaalivektorilla $\mathbf{n}$. Katkoviiva kuvaa varsinaista peiliä.

Kun peili määritellään yksikkövektorilla $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}^2 = 1$), voidaan käsiteltävä vektori $\mathbf{a}$ aina jakaa kahteen komponenttiin, joista toinen on samansuuntainen ja toinen kohtisuorassa peilivektoria vastaan:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{||} + \mathbf{a}_{\perp}$$

Edellinen komponentti on $\mathbf{a}$:n projektio $\mathbf{n}$:lle, joka saadaan vektorialgebrasta tutulla kaavalla:

$$\mathbf{a}_{||} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

Geometrinen algebra taas antaa yksinkertaisen kaavan jäljelle jääneelle komponentille:

$$\mathbf{a}_{\perp} \quad = \quad \mathbf{a} - \mathbf{a}_{||}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{an^2} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\
&= (\mathbf{an} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\
&= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{n})\mathbf{n}
\end{aligned}
$$

Peiliheijastuksen tuloksena $\mathbf{a}_{||}$ vaihtaa suuntaa, mutta $\mathbf{a}_{\perp}$ säilyy samana. Tulos on GA:lla ilmaistuna

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}' &= \mathbf{a}_{\perp} - \mathbf{a}_{||} \\
&= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{n} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\
&= -(\mathbf{n} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n} \\
&= -\mathbf{nan}
\end{aligned}
$$

Saatu kaava on merkillisen kompakti. Vaikka kyseessä onkin eräs yksinkertaisimmista sovelluksista, pitäisi jo tässä vaiheessa käydä selväksi, miten tehokasta GA:lla operoiminen voi olla. Kaava on luonnollisesti riippumaton ulottuvuuksien määrästä.

Bivektorin peilauskaava saadaan, kun ajatellaan sen koostuvan kahdesta vektorista ja sovelletaan edellistä kaavaa kumpaankin erikseen. Lopputuloksessa miinusmerkit kumoavat toisensa ja $B' = +\mathbf{n}B\mathbf{n}$. Tässä nähdään, miksi pyörimisliikkeen käsittely vektorina tuottaa ongelmia; sen muunnoskaava on erilainen kuin paikkavektoreilla.

Rotaatio

Pyörimisliikkeen olemusta olemme jo käsitelleet, mutta varsinaisen rotaatio-operaation yksityiskohdat ovat vielä selvittämättä. Tässä käytetään hyväksi sitä tosiasiaa, että rotaatio voidaan ajatella yhdistelmänä kahdesta peilauksesta, jolloin edellistä peilauskaavaa voidaan hyödyntää.

Jos kaksi peiliä asetetaan suoraan kulmaan, on esineen kuva pyörähtänyt $180°$ alkuperäisestä peilien leikkausviivan ympäri. Yleistettynä mielivaltaisiin ulottuvuuksiin ja kulmiin tämä tarkoittaa seuraavaa:

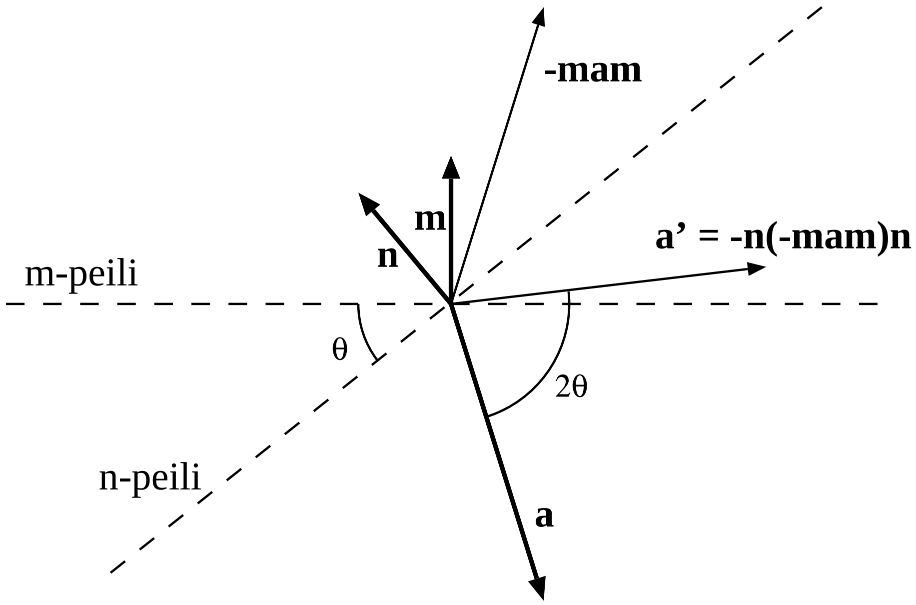
> Kun peilataan ensin vektorilla $\mathbf{m}$ ja sen jälkeen toisella vektorilla $\mathbf{n}$, on suoritettu rotaatio vektorien määräämässä tasossa suuntaan, joka on $\mathbf{m}$:stä $\mathbf{n}$:ään oleva pienempi kulma, ja suuruudeltaan **kaksi kertaa vektorien välinen kulma**. Tämä on helppo todistaa kun toimitaan ainoastaan ko. tasossa; operoitavan vektorin komponenteista ainoastaan tasossa olevat muuttuvat.

GA:n formalismissa vektorin rotaatio on siis yksinkertaisesti

$$\mathbf{a}' = -\mathbf{n}(-\mathbf{mam})\mathbf{n} = +\mathbf{nmamn}$$

Tämä kirjoitetaan usein muotoon $\mathbf{a}' = R\mathbf{a}\tilde{R}$ missä $R = \mathbf{nm}$ on *roottori* eli rotaation operaattori; $\tilde{R} = \mathbf{mn}$ on nimeltään R:n kääntö (reverse), jossa R:n sisältämät vektorit on kirjoitettu käänteiseen järjestykseen. (GA:ssahan yleisesti ottaen $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$.)

Bivektoreille peilaus tuotti erimerkkisen kaavan kuin vektoreille. Rotaatiossa kuitenkin $B' = +\mathbf{n}(+\mathbf{m}B\mathbf{m})\mathbf{n}$ ja kaava onkin sama. Itse asiassa rotaatiokaava on sama mille hyvänsä objektille. Tässä on merkittävä ero tensorialgebraan, jossa rotaatio muodostuu sitä monimutkaisemmaksi, mitä korkeamman asteen objekteja operoidaan. GA



Kuva 4: Rotaatio muodostuu kahdesta peräkkäisestä heijastuksesta.

ei siis ole “tensorilaskennan geometrinen tulkinta” vaan laskennallisestikin erilainen järjestelmä.

Tyypillinen pyörimisliikkeen kuvaus on paikkavektori $\mathbf{x}$, joka kiertää ajan funktiona määrätyllä pyörimistasolla. Roottorikäsitteen avulla se voidaan kuvata tällä tavalla:

$$\mathbf{x}(t) = R(t)\mathbf{x}_0\tilde{R}(t)$$

missä $\mathbf{x}_0$ on paikkavektori tietyllä alkuhetkellä. Laskennalliselta kannalta on hyödyllistä, että $\mathbf{x}(t)$:n liike voidaan käsitellä $R(t)$:n ajallisena muutoksena. Tästä seuraa usein, että ratkaistavat yhtälöt ovat yksinkertaisempia kuin alkuperäiset. Jos esimerkiksi $\mathbf{x}(t)$ on neljännen asteen polynomi, on $R(t)$ toista astetta ja siten helpompi ratkaista.

Kun mutkikkaita laskelmia suoritetaan tietokoneella, on mukana lähes aina pyöristysvirheitä; tietokoneella ei voi kuvata rajattoman tarkkoja reaalilukuja. Virheet voivat kasautua odotettua suuremmiksi, mistä äärimmäinen esimerkki on kaoottinen järjestelmä. (Kaaosteoria keksittiin alunperin tietokoneilla tehtyjen sääennusteiden yhteydessä.) Geometrinen algebra voi auttaa tässäkin, koska laskennallinen yksinkertaisuus — esim. polynomin alempi asteluku — merkitsee pienempää virheherkkyyttä. GA onkin jo käytössä esimerkiksi modernien tietokoneiden grafiikkaprosessoreissa.

Yhteenveto

Modernin luonnontieteen kehitystä ovat osaltaan rajoittaneet käytettävissä olevat matemaattiset menetelmät. Seuraavat kaksi ovat hyvin tiedostettuja, mutta tuskin ainoita ongelmien lähteitä:

- Vektori- ja kompleksialgebra muodostuvat varsin helposti hahmotettavista elementeistä, mutta ne ovat liian yksinkertaisia voidakseen kuvata monia keskeisiä luonnonilmiöitä. Lisäksi ne ovat sidottuja kahteen ja kolmeen ulottuvuuteen.

- Tensorialgebran käyttöalue on huomattavasti laajempi, mutta se hämärtää fysiikan ilmiöt lukujoukkojen taakse, eikä siten tarjoa juuri mitään käsitteellistä apua.

Tämä kahtiajako on osittain historiallisten sattumusten tulosta, ajalta jolloin vektorialgebralla saattoi kattaa miltei koko fysiikan. Historian jäänteistä on kuitenkin kaivettu esiin geometrisen algebran ykseys, joka on huomattava korjaus mainittuihin ongelmiin. Esimerkiksi pyörimisliikkeelle saadaan siten luonteva kuvaus mielivaltaisissa ulottuvuuksissa, kun akselin käsite korvataan suunnatulla tasoelementillä.

GA on kuitenkin enemmän kuin tensorialgebran uusi tulkinta, mikä huomataan tiettyjen laskutoimitusten yksinkertaistumisena. Varsinkin laskennallisen fysiikan soveltajille tämä on merkittävä etu.

Lähteet

Artikkeli perustuu pääasiassa kirjoittajan opintoihin Cambridgen yliopiston fysiikan laitoksella. Kyseisen GA-luentokurssin materiaali sekä muuta asiaankuuluvaa tietoa on saatavilla Internetistä osoitteesta http://www.mrao.cam.ac.uk/∼clifford/.

Kirjoittaja

Risto A. Paju valmistui Cambridgen yliopistosta tutkinnolla M.Sci. vuonna 2002 opiskeltuaan yleistä ja teoreettista fysiikkaa. Lisäksi hänellä on IB-tutkinto v. 1997 Kuopion Lyseon lukiosta sekä työkokemusta teollisuudessa ja CERN:issä.